

b -凸度量空间的不动点理论

李朝博, 陈丽丽

(哈尔滨理工大学 应用数学系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: b -度量空间是一类广义的度量空间, 近年来引起了国内外学者的广泛关注。首先在 b -度量空间中引入凸结构, 从而给出 b -凸度量空间的概念, 并在该空间中给出了 Mann 迭代算法。进一步利用 Mann 迭代所生成的序列, 证明了在一定条件下, 压缩映射在完备的 b -凸度量空间中存在唯一的不动点。

关键词: b -度量空间; 凸结构; Mann 迭代

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.02.019

中图分类号: O177.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2021)02-0143-06

Fixed Point Theory in b -convex Metric Spaces

LI Chao-bo, CHEN Li-li

(Department of Applied Mathematics, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: b -metric spaces are a kind of generalized metric spaces, which have attracted extensive attention of scholars at home and abroad in recent years. In this paper, the convex structure is firstly introduced in b -metric spaces, and consequently the notion of the convex b -metric space is shown. Moreover, Mann iteration is proposed in above space. Furthermore, by utilizing the sequence which is generated by Mann iteration, under some conditions, it is proved that contractive mappings have the unique fixed point in the complete convex b -metric spaces respectively.

Keywords: b -metric space; convex structure; Mann iteration

0 引 言

不动点理论在非线性泛函分析中扮演着非常重要的角色, 在应用数学和其他领域都有着广泛的应用。不动点理论有着悠久的历史, 1910 年, 荷兰数学家 Brouwer 创立了布劳威尔不动点定理, 由此开启了不动点理论研究的先河^[1]。1922 年, 波兰数学

家 Banach 提出了著名的压缩映象原理, 其结果的优美性和证明的简洁性, 吸引了大批学者的关注, 被广泛应用在数学领域并成功解决了许多数学问题, 诸如隐函数存在定理, 微分方程解的存在唯一性等一系列重大问题, 使得不动点理论引起了国内外数学界的高度重视和深入研究^[2]。随着不动点理论的不断发完善, 一系列新颖的压缩映射、非扩张型映射以及相应的不动点定理相继问世, 并成功应用于

收稿日期: 2019-07-11

基金项目: 国家自然科学基金(11401141); 黑龙江省高校青年创新人才培养计划(UNPYSCT-2017078); 黑龙江省博士后科研启动基金(LBH-Q18067)。

作者简介: 陈丽丽(1982—), 女, 博士, 副教授。

通信作者: 李朝博(1991—), 男, 硕士, E-mail: libo566588@126.com.

微分方程、拓扑、经济均衡、对策论和优化控制等诸多领域,不动点理论已成为现代数学的重要分支。许多国内外学者利用 Banach 空间的几何性质对各种非扩张型单值映射和非扩型集值映射的不动点性质进行了深入研究,所取得的研究成果极大地丰富和发展了不动点理论。随着不动点理论不断发展,人们已经不能满足于现状,通过各种方式对度量空间进行推广。1993 年,Czerwik 提出了 b -度量空间的概念,并在该空间中给出了压缩映射的不动点定理^[9]。随后,国内外众多学者对 b -度量空间的不动点理论进行了广泛的研究,例如,1994 年,Matthews 提出了偏序度量空间的概念^[10];2013 年,Shukla 在 b -度量空间与偏序度量空间的基础上提出了偏序 b -度量空间的概念^[11];2011 年,Hussian 和 Shah 提出了锥 b -度量空间^[12]。更多关于 b -度量空间的研究成果见文 [7-14]。

1970 年,Takahashi 提出了凸结构的概念,并给出了凸度量空间在非扩张映像下的不动点理论^[15-16]。随后,Kink 与 Goebal 研究了凸度量空间的迭代问题^[17]。更多关于凸结构的研究见文献 [8-22]。本文在此基础上,继续对 b -度量空间进行研究推广,在 b -度量空间中引入了凸结构,从而给出 b -凸度量空间的概念,并在该空间中给出了 Mann 迭代算法。进一步利用 Mann 迭代生成序列,证明了完备的 b -凸度量空间的不动点性质。

1 预备知识

定义 1^[23] 设 X 是一个非空集合,令 $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$,若对任意 $x, y, u \in X$ 满足:

- 1) $d(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$;
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$;
- 3) $d(x, y) \leq s [d(x, u) + d(u, y)]$ 。

其中 $s \geq 1$ 。则称 d 是 X 上的一个 b -度量,称 (X, d) 为 b -度量空间, s 为其系数。很显然, $s = 1$ 时, d 就是通常意义的度量。

定义 2^[24] 设 (X, d) 为度量空间,连续映射 $w: X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$, 若对于所有 $x, y, u \in X, \alpha \in [0, 1]$, 有以下不等式成立: $d(u, w(x, y, \alpha)) \leq \alpha d(u, x) + (1 - \alpha) d(u, y)$ 则 w 称作 X 上的一个凸结构, (X, d, w) 称为凸度量空间。

定义 3^[25] 设 (X, d) 是 b -度量空间, $\{x_n\}$ 是 X

中的序列, $\{x_n\}$ 称为收敛的, 如果存在点 $x^* \in X$, 使得 $\forall \varepsilon > 0$, 存在自然数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $d(x_n, x^*) < \varepsilon$ 。记为 $x_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ 。

$\{x_n\}$ 称为 X 中的 Cauchy 列, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在自然数 n_0 , 当 $n, m \geq n_0$ 时有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ 。 (X, d) 称为完备的 b -度量空间, 若 X 中的每一个 Cauchy 列都收敛。

2 主要结果

定义 4 设 (X, d) 为 b -度量空间, 连续映射 $w: X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$, 若对于任意的 $x, y, u \in X$, 有以下不等式成立:

$$d(u, w(x, y, \alpha)) \leq \alpha d(u, x) + (1 - \alpha) d(u, y)$$

则称 (X, d, w) 为 b -凸度量空间。

在一般的线性空间中, Mann 迭代格式定义如下:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n$$

下面利用凸结构将 Mann 迭代格式引入到 b -度量空间中, 格式如下:

$$\begin{cases} x_1 = c, c \in X \\ x_{n+1} = w(x_n, T x_n; \alpha_n) \end{cases}$$

例 1 令 $X = R$, 令 $d(x, y) = |x - y|^r$, 其中 r 为任意实数且 $r > 1$ 。很显然 d 满足定义 1 中的 (1) 和 (2)。此外, 对任意的 $x, y, z \in X$ 有

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y|^r = |x - z + z - y|^r \leq \\ & [|x - z| + |z - y|]^r \leq \\ & 2^{r-1} [|x - z|^r + |z - y|^r] = \\ & 2^{r-1} (d(x, z) + d(z, y)) \end{aligned}$$

所以, (X, d) 为 $s = 2^{r-1}$ 的 b -度量空间。设 $w: X \times X \times \{\frac{1}{2}\} \rightarrow X$, 满足

$$w(x, y; \alpha) = \alpha x + (1 - \alpha) y, \alpha = \frac{1}{2}$$

易知 w 为连续映射, 下面验证其满足对任意的 $x, y, u \in X$ 有

$$d(u, w(x, y; \alpha)) \leq \alpha d(u, x) + (1 - \alpha) d(u, y)$$

事实上,

$$\begin{aligned} d(u, w(x, y; \alpha)) &= |u - [\alpha x + (1 - \alpha) y]|^r \leq \\ & 2^{r-1} [\alpha^r |u - x|^r + (1 - \alpha)^r |u - y|^r] = \\ & \alpha d(u, x) + (1 - \alpha) d(u, y), \end{aligned}$$

则 (X, d, w) 是一个 $s = 2^{r-1}$ 的 b -凸度量空间。此

外, (X, d, w) 不是一个通常意义下的度量空间, 例如

$r=2$ 时,

$$d(2, 4) = 4 > d(2, 3) + d(3, 4) = 2$$

例2 令 $X = R^n$, 对任意的

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X,$$

$$\text{令 } d(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2,$$

由于

$$d(x, y) \leq \sum_{i=1}^n (|x_i - u_i| + |u_i - y_i|)^2 \leq$$

$$2 \sum_{i=1}^n (|x_i - u_i|^2 + |u_i - y_i|^2) \leq$$

$$2 \left(\sum_{i=1}^n |x_i - u_i|^2 + \sum_{i=1}^n |u_i - y_i|^2 \right) =$$

$$2(d(x, u) + d(u, y))$$

易知 d 满足定义 1 的 (1) 和 (2), 所以 (X, d) 为 $s=2$ 的 b -度量空间。设

$$w: X \times X \times \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow X, \alpha = \frac{1}{2}$$

满足 $w(x, y; \alpha) = \alpha x + (1 - \alpha)y$

易知 w 为连续映射, 对任意的 $x, y, u \in X$ 有

$$d(u, w(x, y; \alpha)) \leq \alpha d(u, x) + (1 - \alpha)d(u, y)$$

事实上,

$$d(u, w(x, y; \alpha)) =$$

$$\sum_{i=1}^n (u_i - (\alpha x_i + (1 - \alpha)y_i))^2 \leq$$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha |u_i - x_i| + (1 - \alpha)|u_i - y_i|)^2 =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (u_i - x_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (u_i - y_i)^2 =$$

$$\alpha d(u, x) + (1 - \alpha)d(u, y)$$

所以 (X, d, w) 是一个 $s=2$ 的 b -凸度量空间。但 (X, d, w) 不是一个通常意义下的度量空间, 例如 $n=1$ 时, 见例 1。

注 例 1 和例 2 都是在 b -凸度量空间中引入连续映射 $w(x, y; \alpha) = \alpha x + (1 - \alpha)y$ 作为凸结构。但下面的例子说明对于同一个映射 w , 在某些 b -度量空间中, 将不能构成凸结构。

例3 令 $X = l^p, 0 < p < 1$ 且

$$l^p = \{ \{x_n\} \subset R: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \}$$

定义映射 $d: X \times X \rightarrow R^+ \cup \{0\}$, 满足

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p},$$

对于任意

$$x = \{x_n\}, y = \{y_n\}, u = \{u_n\} \in l^p,$$

由

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - u_n + u_n - y_n|^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n - u_n| + |u_n - y_n|)^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - u_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n - y_n|^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\frac{2^{1/p}}{2} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - u_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - y_n|^p \right)^{1/p} \right] =$$

$$2^{(1-p)/p} (d(x, u) + d(u, y))$$

易知 (X, d) 是系数为 $s = 2^{(1-p)/p} > 1$ 的 b -度量空间。设连续映射 w , 满足

$$w: X \times X \times [0, 1] \rightarrow X,$$

对于任意 $x, y \in X$, 令

$$w(x, y; \alpha) = \alpha x + (1 - \alpha)y$$

下面取 $x_n < u_n, y_n < u_n, \forall \alpha \in [0, 1]$,

$$d(u, w(x, y; \alpha)) =$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(u_n - x_n) + (1 - \alpha)(u_n - y_n)|^p \right)^{1/p} \geq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} [\alpha(u_n - x_n)]^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} [(1 - \alpha)(u_n - y_n)]^p \right)^{1/p} =$$

$$\alpha d(u, x) + (1 - \alpha)d(u, y)$$

此时 w 不是凸结构。

定理1 设 (X, d, w) 为完备的 b -凸度量空间, 映射 $T: X \rightarrow X$ 满足下列不等式

$$d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y), \forall x, y \in X$$

设连续映射 $w: X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$, 令

$$x_{n+1} = w(x_n, Tx_n; \alpha_n), d(x_0, Tx_0) = M < \infty,$$

其中 $0 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{(n+2)s}, 0 \leq \beta \leq \frac{1}{ms}$ (m 为任意实数且 $m > 1$)。则 T 在 X 中存在唯一的不动点。

证明:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, w(x_n, Tx_n; \alpha_n)) \leq$$

$$(1 - \alpha_n) d(x_n, Tx_n)$$

$$d(x_n, Tx_n) \leq s d(x_n, Tx_{n-1}) + s d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq$$

$$s d(w(x_{n-1}, Tx_{n-1}; \alpha_{n-1}), Tx_{n-1}) + s \beta d(x_{n-1}, x_n) \leq$$

$$s [\alpha_{n-1} d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) + \beta (1 - \alpha_{n-1}) d(x_{n-1}, Tx_{n-1})] =$$

$$s [\alpha_{n-1} + \beta (1 - \alpha_{n-1})] d(x_{n-1}, Tx_{n-1})$$

$$\text{令 } \lambda_{n-1} = s [\alpha_{n-1} + \beta (1 - \alpha_{n-1})],$$

$$\lambda = \sup_n \{ \lambda_{n-1}; n = 1, 2, 3, \dots \}.$$

因为

$$\lambda_{n-1} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2m} < 1$$

从而得到 $\lambda < 1$ 。则

$$d(x_n, Tx_n) \leq \lambda(x_{n-1}, Tx_{n-1})$$

$$d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) \leq \lambda(x_{n-2}, Tx_{n-2})$$

$$\dots$$

$$d(x_1, Tx_1) \leq \lambda(x_0, Tx_0)$$

因此

$$d(x_n, Tx_n) \leq \lambda^n(x_0, Tx_0)$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq (1 - \alpha_n) \lambda^n d(x_0, Tx_0) \leq$$

$$\lambda^n d(x_0, Tx_0)$$

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq sd(x_n, x_{n+1}) + sd(x_{n+1}, x_{n+p}) \leq$$

$$sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 d(x_{n+2}, x_{n+p})$$

$$\leq \dots \leq$$

$$sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots +$$

$$s^{p-1} d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) + s^{p-1} d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq$$

$$(s\lambda^n + s^2\lambda^{n+1} + \dots + s^{p-1}\lambda^{n+p-1}) d(x_0, Tx_0) \leq$$

$$\lambda^n (s + s^2 + \dots + s^{p-1}) d(x_0, Tx_0)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 显然 $\lambda^n \rightarrow 0$, 所以对任意自然数 P , $d(x_n, x_{n+p}) \rightarrow 0$, 从而可知 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列。

由空间的完备性知, 存在 $x^* \in X$, 使得 $x_n \rightarrow x^* \in X, (n \rightarrow \infty)$ 。注意到

$$d(x^*, Tx^*) \leq s[d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx^*)] \leq$$

$$sd(x^*, x_n) + s^2[d(x_n, Tx_n) + d(Tx_n, Tx^*)] \leq$$

$$sd(x^*, x_n) + s^2 d(x_n, Tx_n) + s^2 \beta d(x_n, x^*) \leq$$

$$(s + s^2 \beta) d(x^*, x_n) + s^2 d(x_n, Tx_n) \leq$$

$$(s + s^2 \beta) d(x^*, x_n) + s^2 \lambda^n d(x_0, Tx_0)$$

令 $n \rightarrow \infty$, 从而 $d(x^*, Tx^*) = 0$, 所以 $Tx^* = x^*$, 则 T 在 X 中存在不动点。

最后证明不动点的唯一性。假设 T 在 X 中不动点不唯一。即存在 $y^* \in X$, 使得 $x^* \neq y^*$ 满足 $Ty^* = y^*$, 则

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \leq \beta d(x^*, y^*)$$

若 $d(x^*, y^*) \neq 0$, 由于 $0 < \beta < 1$, 产生矛盾, 故 $d(x^*, y^*) = 0$, 即 $x^* = y^*$ 。所以 T 在 X 中存在唯一的不动点。

例4 设 $X = R^+ \cup \{0\}$, 对 $\forall x \in X$, 令 $Tx = \frac{x}{2}$,

定义 $d: X \times X \rightarrow X$, 满足

$$d(x, y) = (x - y)^2$$

设连续映射 $w: X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$, 满足

$$w(x, y; \alpha) = \alpha x + (1 - \alpha)y$$

令 $x_{n+1} = w(x_n, Tx_n; \alpha_n)$,

其中 $\alpha_n = \frac{1}{(n+2)s}$ 。则 (X, d, w) 为 $s=2$ 的 b -凸度

量空间, 且 T 在 X 中存在唯一的不动点。

证明: 由例1易知 (X, d) 为 $s=2$ 的 b -度量空间, 又因为, 对任意 $x, y, u \in X$, 有

$$d(u, w(x, y; \alpha)) = d(u, \alpha x + (1 - \alpha)y) =$$

$$[\alpha(u - x) + (1 - \alpha)(u - y)]^2 \leq$$

$$[\alpha|u - x| + (1 - \alpha)|u - y|]^2 =$$

$$(\alpha|u - x|)^2 + ((1 - \alpha)|u - y|)^2 + 2\alpha(1 -$$

$$\alpha)|u - x||u - y| \leq$$

$$(\alpha|u - x|)^2 + ((1 - \alpha)|u - y|)^2 + \alpha(1 -$$

$$\alpha)(|u - x|^2 + |u - y|^2) =$$

$$\alpha(u - x)^2 + (1 - \alpha)(u - y)^2 =$$

$$\alpha d(u, x) + (1 - \alpha)d(u, y)$$

即 (X, d, w) 为 $s=2$ 的 b -凸度量空间。

设 $x_0 = 1$, 则 $Tx_0 = \frac{1}{2}x_0 = \frac{1}{2}$,

$$x_1 = \alpha_0 x_0 + (1 - \alpha_0)Tx_0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

$$Tx_1 = \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{16}$$

$$x_2 = \alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1)Tx_1 = \frac{1}{6} \times \frac{5}{8} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} =$$

$$\frac{35}{96}$$

$$Tx_2 = \frac{1}{2}x_2 = \frac{35}{192}$$

以此计算

$$x_3 = \alpha_2 x_2 + (1 - \alpha_2)Tx_2 = \frac{1}{8} \times \frac{35}{96} + \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{35}{96} =$$

$$\frac{315}{1536}$$

$$Tx_3 = \frac{1}{2}x_3 = \frac{315}{3072}$$

...

$$x_{n-1} = \frac{5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)}{4 \times 6 \times \dots \times 8 \times (2n-1) \times 2^n} =$$

$$\frac{(2n+1)!!}{3 \times 2^{n-2}(2n-1)!!}$$

$$Tx_{n-1} = \frac{1}{2}x_{n-1} = \frac{(2n+1)!!}{3 \times 2^{n-1}(2n-1)!!}$$

从而得到第 n 项,

$$\begin{aligned} x_n &= \alpha_{n-1}x_{n-1} + (1 - \alpha_{n-1})Tx_{n-1} = \\ &= \frac{5 \times 7 \times \cdots \times (2n+3)}{4 \times 6 \times \cdots \times 8 \times (2n+2) \times 2^n} = \\ &= \frac{(2n+3)!!}{3 \times 2^{n-1}(2n+2)!!} \\ Tx_n &= \frac{1}{2}x_n = \frac{5 \times 7 \times \cdots \times (2n+3)}{3 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 8 \times (2n+2) \times 2^n} = \\ &= \frac{(2n+3)!!}{3 \times 2^n(2n+2)!!} \end{aligned}$$

易知 $n \rightarrow \infty, x_n \rightarrow 0 \in X, Tx_n \rightarrow 0 \in X$, 所以 0 是 T 在 X 中的不动点。假设存在两个不动点 $x^*, y^* \in X, x^* \neq y^*$ 满足 $Tx^* = x^*, Ty^* = y^*$, 则

$$\begin{aligned} d(x^*, y^*) &= d(Tx^*, Ty^*) = d\left(\frac{1}{2}x^*, \frac{1}{2}y^*\right) = \\ &= \frac{1}{4}d(x^*, y^*) \end{aligned}$$

所以 $d(x^*, y^*) = 0$, 即 $x^* = y^*$, 所以 0 是 T 在 X 中唯一的不动点。

注 在度量空间中, 通过引入凸结构, 使得度量空间兼具了线性结构的优点, 便可以构造 Mann 迭代序列, 克服了简单迭代法的一些缺陷, 并去掉了加在非线性算子上的一些限制条件, 具有较大的优越性。接下来, 我们给出膨胀映射下 Mann 迭代序列收敛到唯一不动点的例子。

例 5 令 $X = R^+ \cup \{0\}$, 对 $\forall x \in X$, 令 $Tx = 2x$ 。

定义 $d: X \times X \rightarrow X$, 满足

$$d(x, y) = (x - y)^2,$$

设映射 $w: X \times X \times [0, 1] \rightarrow X$ 满足

$$w(x, y; \alpha) = \alpha x + (1 - \alpha)y,$$

令 $x_{n+1} = w(x_n, Tx_n; \alpha_n)$, 其中, $\alpha_n = \frac{1}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$,

则 (X, d, w) 是 $s = 2$ 的 b -凸度量空间。由上述假设下, 易知, T 为单射, 从而 $T^{-1}: T(X) \rightarrow X$ 存在, 且

$$T^{-1}(x) = \frac{1}{2}x. \text{ 令 } x_0 = 1, \text{ 则}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \times x_0 + \frac{1}{2}T^{-1}x_0 = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \times x_1 + \frac{1}{2}T^{-1}x_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

...

$$x_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

则有 $n \rightarrow \infty, x_n \rightarrow 0 \in X, T^{-1}x_n \rightarrow 0 \in X$, 故 0 是 T^{-1} 在 X 中的不动点, 即 $T^{-1}(0) = 0$ 。从而得到 $T(0) = 0$, 所以 0 是 T 在 X 中的不动点。假设存在两个不动点 $a \neq b$ 满足 $Ta = a, Tb = b$, 则 $d(a, b) = d(Ta, Tb) = 4d(a, b)$, 产生矛盾, 所以不动点是唯一的。

3 结 论

文章的主要工作是将凸结构引入到 b -度量空间中, 从而给出了新的概念 b -凸度量空间, 并给出 b -凸度量空间的具体例子。利用凸结构首次在 b -凸度量空间中给出了 Mann 迭代, 并利用 Mann 迭代生成序列, 证明了完备 b -凸度量空间中压缩映射的不动点性质。

参 考 文 献:

- [1] TANAKA Y. Various Notions about Constructive Brouwer's Fixed Point Theorem [J]. Iaeng Inter. J. Appl. Math., 2012, 42(3): 152.
- [2] ALACA C. Banach Contraction Mapping Principle for Satisfying a General Contractive Condition of Integral Type in Dislocated Fuzzy Metric Spaces [J]. Bull. Pure. Appl. Math, 2010, 4(2): 258.
- [3] CZERWIK S. Contraction Mappings in b-metric Spaces [J]. Acta Mathematica Et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1993, 1(1): 5.
- [4] BOTA M F, KARAPINAR E. A Note on "Some Results on Multi-valued Weakly Jungck Mappings in b-metric Space" [J]. Open Math, 2013, 11(9): 1711.
- [5] GE X, LIN S. A Note on Partial b-metric Spaces [J]. Mediterr. J. Math., 2016, 13(3): 1273.
- [6] HUANG H, XU S. Erratum to: Fixed Point Theorems of Contractive Mappings in Cone b-metric Spaces and Applications [J]. Fixed Point Theory Appl., 2014, 2014(1): 1.
- [7] HUSSAIN N, SHAH M H. KKMMappings in Cone b-metric Spaces [J]. Comput. Math. Appl., 2011, 62(4): 1677.
- [8] SARWAR M, RAHMAN M U. Fixed Point Theorems for Ciric's and Generalized Contractions in b-metric Spaces [J]. Inter. J. Anal. Appl., 2015, 7(1): 70.
- [9] ARAB R, ZARE K. New Fixed Point Results for Rational Type Contractions in Partially Ordered b-metric Spaces [J]. Inter. J. Anal. Appl., 2016, 10(2): 64.
- [10] XU S, CHENG S, ALEKSI S, et al. New Fixed Point Results of Generalized G-quasi-contractions in Cone b-metric Spaces over Banach Algebras [J]. Anal. Theory Appl., 2017, 33(2): 118.
- [11] ROSHAN R, SHOBKOLAEI N, SEDGHI S, et al. Common Fixed Point of four Maps in b-metric Spaces [J]. Hacet. J. Math. Stat., 2014, 43(4): 613.

- [12] ALQAHTANIL B, FULGA A, KARPLNARA E, et al. Contractions with Rational Inequalities in The Extended b -metric Space [J]. J. Inequal. Appl., 2019, 2019(1): 1.
- [13] OZTURK V, ANSARI A H. CommonFixed Point Theorems for Mappings Satisfying (E. A)-property via C-class Functions in b-metric Spaces [J]. Appl. Gen. Topol., 2017, 18(1): 45.
- [14] AZAM A, MEHMOOD N, AHMAD J, et al. Multivalued Fixed Point Theorems in Cone b-metric Spaces [J]. Appl. Gen. Topol., 2013, 2013(1): 582.
- [15] TAKAHASHI W. AConvexity in Metric Space and No Expansive Mappings [J]. Kodai. Math. J., 1970, 22: 142.
- [16] RATHEE S, DHINGRA K, KUMARA A. Existence of Common Fixed Point and Best Proximity Point for Generalized No Expansive Type Maps in Convex Metric Space [J]. Springer Plus, 2016, 5(1): 1.
- [17] GOEBAL K, KIRK W A. Iteration Processes for No Expansive Mapping [J]. Contemporary Math., 1983, 21: 115.
- [18] 陈丽丽, 高璐, 周晶. Banach 空间中平均非扩张集值映射的稳定点 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2018, 23(1): 137.
CHEN Lili, GAO Lu, ZHOU Jing. On Stationary Points of Mean Nonexpansive Set-valued Mappings in Banach Spaces [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2018, 23(1): 137.
- [19] 陈丽丽, 邹洁, 高璐. (α, β) -广义混合集值映射的吸收点和收敛性定理 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2019, 24(3): 138.
CHEN Lili, ZOU Jie, GAO Lu. Attractive Points and Convergence Theorems of (α, β) -Generalized Hybrid Set-valued Mappings [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2019, 24(3): 138.
- [20] CHEN L, ZOU J, ZHAO Y, et al. Iterative Approximation of Common Attractive Points of (α, β) -generalized Hybrid Set-valued Mappings [J]. J. Fixed. Point Theory Appl., 2019, 21: 58.
- [21] MENG Q. OnGeneralized Algebraic Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems [J]. Chinese Ann. Math., Series B, 2019, 40(3): 429.
- [22] KUMAR A, RATHEE S. Fixed Point and Common Fixed Point Results in Cone Metric Space and Application to Invariant Approximation [J]. Fixed Point Theory Appl., 2015, 2015(1): 1.
- [23] BEG I, ABBAS M. Fixed Point Theorems for Weakly Inward Multivalued Maps on a Convex Metric Space [J]. Demonstration Math., 2006, 39(1): 149.
- [24] PARK S. Fixed Point Theorems in Hyper Convex Metric Spaces [J]. Nonlinear. Anal., 1999, 37(4): 467.
- [25] KOCOUC R, EK P, TAKAHASHI W, et al. Fixed Point Theorems and Weak Convergence Theorems for Generalized Hybrid Mappings in Hilbert Spaces [J]. Taiwanese J. Math., 2010, 14(6): 745.

(编辑: 王 萍)